લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 13**

PART A

1. (B) **2.** (B) **3.** (B) **4.** (A) **5.** (C) **6.** (D) **7.** (A) **8.** (A) **9.** (B) **10.** (C) **11.** (C) **12.** (D) **13.** (D) **14.** (D) **15.** (A) **16.** (B) **17.** (A) **18.** (A) **19.** (C) **20.** (D) **21.** (B) **22.** (B) **23.** (A) **24.** (C) **25.** (A) **26.** (C) **27.** (B) **28.** (B) **29.** (B) **30.** (C) **31.** (C) **32.** (D) **33.** (B) **34.** (B) **35.** (D) **36.** (C) **37.** (B) **38.** (D) **39.** (B) **40.** (A) **41.** (A) **42.** (D) **43.** (B) **44.** (D) **45.** (D) **46.** (D) **47.** (D) **48.** (D) **49.** (A) **50.** (C)

PART B

વિભાગ-A

1.

ડા.બા. $= \left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]$

ધારો કે, $x = \cos 2\theta$ લેતાં,

$\therefore\ 2\theta = \cos^{-1} x,\quad 2\theta \in [0, \pi]$

$\therefore\ \theta = \dfrac{1}{2}\cos^{-1} x,\ \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}}{1+\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{1-\sqrt{\tan^2\theta}}{1+\sqrt{\tan^2\theta}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{1-|\tan\theta|}{1+|\tan\theta|}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]$

$\left(\because\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \le x \le 1\right.$

$\therefore\ -\cos\dfrac{\pi}{4} \le \cos 2\theta \le \cos 0$

$\therefore\ \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) \le \cos 2\theta \le \cos 0$

$\therefore\ \cos\dfrac{3\pi}{4} \le \cos 2\theta \le \cos 0$

$\therefore\ 0 \le 2\theta \le \dfrac{3\pi}{4}$ ($\because$ $\cos\theta$ એ પ્રથમ અને બીજા ચરણમાં ઘટતું વિધેય છે.)

$\therefore\ 0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{8}$

$\therefore\ \tan\theta > 0$

$\left.\therefore\ |\tan\theta| = \tan\theta\right)$

$= \tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}\right]$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right)$

અહીં, $0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{8}$

$\Rightarrow -\dfrac{3\pi}{8} \le -\theta \le 0$

$\Rightarrow -\dfrac{\pi}{8} \le \dfrac{\pi}{4} - \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right) \in \left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

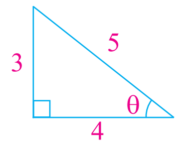
$= \dfrac{\pi}{4} - \theta$

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\cos^{-1}x$

= જ.બા.

2.

ડા.બા. $= 2 \sin^{-1}\frac{3}{5}$



$\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{3}{5}$

અહીં, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

હવે, $\quad 2 \sin\frac{3}{5} = 2\theta$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}}$

$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$

$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{24}{7}$

$\therefore \quad 2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)$

$\therefore \quad 2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

3.

$y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$ ની બંને બાજુ $\log$ લેતાં,

$\therefore \log y = (\sin x - \cos x)\log(\sin x - \cos x)$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x)\cdot\frac{1}{\sin x - \cos x}\cdot(\cos x + \sin x) + \log(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)$

$= (\cos x + \sin x) + \log(\sin x - \cos x)\cdot(\cos x + \sin x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\,[1 + \log(\sin x - \cos x)]\,(\cos x + \sin x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}\,(1 + \log(\sin x - \cos x))(\cos x + \sin x)$

4.

રીત 1 :

$I = \int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$

$= \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x}\,dx$

$= \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}\,dx$

અહીં, $1 + \sin 2x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ 2\cos 2x\,dx = dt$

$\therefore\ \cos 2x \cdot dx = \frac{dt}{2}$

$\therefore\ I = \int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt$

$= \frac{1}{2}\log|t| + c$

$\therefore\ I = \frac{1}{2}\log|1 + \sin 2x| + c$

$\therefore\ I = \frac{1}{2}\log|\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x| + c$

$\therefore\ I = \frac{1}{2}\log|(\cos x + \sin x)^2| + c$

$\therefore\ I = \log|\sin x + \cos x| + c$

રીત 2 :

$\int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$

$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$

$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2}\,dx$

$= \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

અહીં, $\cos x + \sin x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ (-\sin x + \cos x)\,dx = dt$

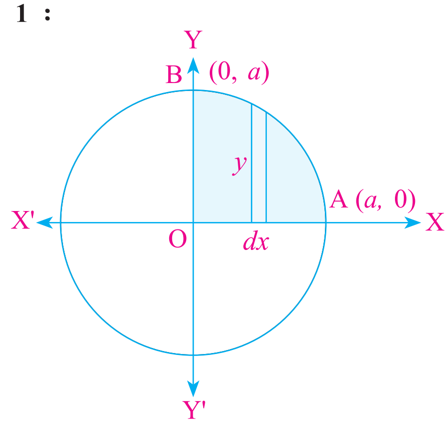
$\therefore\ (\cos x - \sin x)\,dx = dt$

$= \int\frac{dt}{t}$

$= \log|\cos x + \sin x| + c$

5.

રીત 1 :



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 4 × (આપેલ વક્ર રેખા $x = 0$, $x = a$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ). (વર્તુળ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.)

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a y\,dx$ (શિરોલંબ પટ્ટીઓ લેતાં)

$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

હવે, $x^2 + y^2 = a^2$ પરથી $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ મળશે. અહીં પ્રદેશ AOBA પ્રથમ ચરણમાં આવેલો છે. તેથી $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ લઈશું. આપણને વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલન કરતાં મળશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

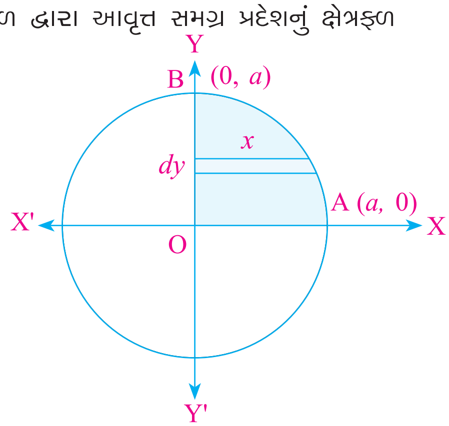
$= 4\left[\left(\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$

$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \pi a^2$ ચો. એકમ

રીત 2 :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ લેતાં, આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ



$= 4\int_0^a x\,dy$

$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$

$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$

$= 4\left[\left(\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$

$= 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$

$= \pi a^2$ ચો. એકમ

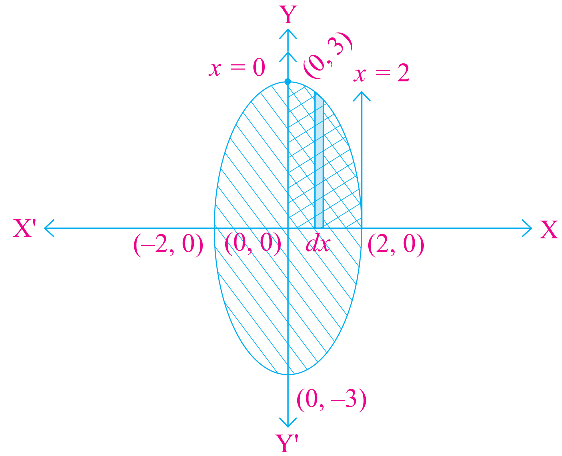
6.

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 4,\ a = 2$

$b^2 = 9,\ b = 3$

$b > a$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore A = 4|I|$

હવે, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\therefore y^2 = 9\left[1 - \frac{x^2}{4}\right]$

$= \frac{9}{4}(4 - x^2)$

$\therefore y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

$I = \int_0^2 y\,dx$

$I = \int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx$

$I = \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

$= \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\,dx$

$I = \frac{3}{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2$

$I = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{2}(0) + 2\sin^{-1}(1)\right) - (0)\right]$

$I = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2}$

$I = \frac{3\pi}{2}$

હવે, $A = 4|I|$

$= 4\left|\frac{3\pi}{2}\right|$

$\therefore\ A = 6\pi$ ચોરસ એકમ

7.

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

$\therefore dy = \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)dx$

$\therefore dy = \tan^2\frac{x}{2}\,dx$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \int dy = \int \tan^2\frac{x}{2}\,dx$

$\therefore \int dy = \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$

$\therefore \quad y = \dfrac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - x + c$

$\therefore \quad y = 2 \tan \dfrac{x}{2} - x + c;$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

8.

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ લેતાં,

$\therefore \quad \vec{x} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ લેતાં,

$\therefore \quad \vec{y} = 2\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{x}$ અને $\vec{y}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશ $= \pm \dfrac{\vec{x} \times \vec{y}}{|\vec{x} \times \vec{y}|}$

હવે, $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$\vec{x} \times \vec{y} = 16\hat{i} - 16\hat{j} - 8\hat{k}$

$|\vec{x} \times \vec{y}| = \sqrt{256 + 256 + 64}$

$= \sqrt{576}$

$= 24$

$\vec{x}$ અને $\vec{y}$ બંનેને લંબ એકમ સદિશ

$= \pm \dfrac{(16\hat{i} - 16\hat{j} - 8\hat{k})}{24}$

$= \pm \dfrac{2}{3}\hat{i} \mp \dfrac{2}{3}\hat{j} \mp \dfrac{1}{3}\hat{k}$

9.

અહીં, $\vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k};$

$\vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$

ધારો કે, બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો α હોય તો,

$\therefore \quad \cos \alpha = \dfrac{|\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}|}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$ .... (1)

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = (\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 3 + 5 + 8$

$= 16$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{1+1+4}$

$= \sqrt{6}$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{9+25+16}$

$= \sqrt{50}$

$\therefore \quad \cos \alpha = \dfrac{|16|}{\sqrt{50}\,\sqrt{6}}$

$\therefore \quad \cos \alpha = \dfrac{|16|}{5\sqrt{2}\,\sqrt{6}}$

$= \dfrac{16}{5\sqrt{12}}$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{16}{5\sqrt{12}}\right)$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

આથી, બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $\cos^{-1}\left(\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\right)$ છે.

10.

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

રેખાની દિશા $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

રેખાનું સદિશ સમીકરણ,

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\therefore \quad \vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), \lambda \in R$

કાર્તેઝિય સમીકરણ : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{x-4}{-1}$

11.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

નિદર્શાવકાશ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} છે.

હવે E = {3, 6}, F = {2, 4, 6} અને E ∩ F = {6}.

તેથી $P(E) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$,

$P(F) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ અને

$P(E \cap F) = \dfrac{1}{6}$

સ્પષ્ટ છે કે $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

તેથી, E અને F નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

12.

રીત 1 :

આપણી પાસે,

P(A અને Bમાંથી ઓછામાં ઓછી એક)

$= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$

$= P(A) + P(B)\,(1 - P(A))$

$= P(A) + P(B)\,P(A')$

$= 1 - P(A') + P(B)\,P(A')$

$= 1 - P(A')\,[1 - P(B)]$

$= 1 - P(A')\,P(B')$

રીત 2 :

$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)')$

$= 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - P(A')\,P(B')$

(કારણ કે A′, B′ નિરપેક્ષ છે.)

વિભાગ-B

13.

$\forall x_1, x_2 \in R$ (પ્રદેશ), $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore 3 - 4x_1 = 3 - 4x_2$

$\therefore -4x_1 = -4x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ f એ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે, $y \in R$ (સહપ્રદેશ) $y = f(x)$

$\therefore y = 3 - 4x$

$\therefore 4x = 3 - y$

$\therefore x = \frac{3-y}{4} \in R$

હવે, $f(x) = f\left(\frac{3-y}{4}\right)$

$= 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right)$

$= 3 - 3 + y$

$= y$

આમ, પ્રત્યેક $y \in R$ (સહપ્રદેશ) માટે $x = \frac{3-y}{4} \in R$ (પ્રદેશ) એવો મળે છે કે, જેથી $f(x) = y$ થાય છે.

$\therefore$ f એ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

14.

અહીં $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

હવે, $A + A^T = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

હવે $A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

$= A$

15.

$A_{11} = -6, A_{12} = 4, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

$adj\ A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12+12 & -6+6 \\ 24-24 & 12-12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .... (1)

$(adj\ A)\,A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12+12 & -18+18 \\ 8-8 & 12-12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .... (2)

$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$= -12 + 12$

$= 0$

$|A|\ I_2 = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .... (3)

પરિણામ (1), (2), (3) પરથી,

$A(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\ I$

16.

$e^y\,(x + 1) = 1$ નું

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$e^y\,(1) + (x + 1)\,e^y\,\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore (x + 1)\,e^y\,\frac{dy}{dx} = -e^y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x+1)}$ .... (1)

પરિણામ (1) નું બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{.......... (2)}$$

વળી, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(x+1)^2}$ .... (3)

$\therefore$ પરિણામ (2) અને (3) પરથી,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

17.

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$

$f(x)$ ના સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે,

$f'(x) = 0$

$\therefore \cos x + \sin x = 0$

$\therefore \cos x = -\sin x$

$\therefore \tan x = -1$

$\therefore x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad (\because 0 < x < 2\pi)$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ માટે,

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} \qquad \left(\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \ \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} < 0$$

$\therefore f$ એ $x = \frac{3\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

$$\therefore f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$\therefore$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $= \sqrt{2}$

$\rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ માટે,

$$f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} \qquad \left(\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} > 0$$

$\therefore f$ એ $x = \frac{7\pi}{4}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે છે.

$$f\left[\frac{7\pi}{4}\right] = \sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2}$$

$\therefore$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $= -\sqrt{2}$

18.

અદિશ λ માટે $\vec{\beta_1} = \lambda\vec{\alpha}$ લો,

એટલે કે $\vec{\beta_1} = 3\lambda\vec{i} - \lambda\vec{j}$

હવે, $\vec{\beta_2} = \vec{\beta} - \vec{\beta_1} = (2-3\lambda)\hat{i} + (1+\lambda)\hat{j} - 3\hat{k}$

તથા $\vec{\beta_2}$ એ $\vec{\alpha}$ ને લંબ હોવાથી,

આપણી પાસે $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta_2} = 0$

એટલે કે $3(2 - 3\lambda) - (1+\lambda) = 0$ હોવું જોઈએ.

આથી, $\lambda = \frac{1}{2}$.

માટે $\vec{\beta_1} = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$ અને $\vec{\beta_2} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - 3\hat{k}$

19.

$L : \vec{r} = (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$M : (\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$\therefore \vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$; તથા

$\vec{b_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

અને $\vec{a_2} = -4\hat{i} - \hat{k}$; તથા $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b_1} \times \vec{b_2} \neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય છે.

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{64+64+16}$

$= \sqrt{144}$

$= 12$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (-4\hat{i} - \hat{k}) - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})$

$= (-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$

$= -80 - 16 - 12$

$= -108$

$\neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{\left|(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})\right|}{\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right|}$$

$$= \frac{|-108|}{12}$$

$$= \frac{108}{12}$$

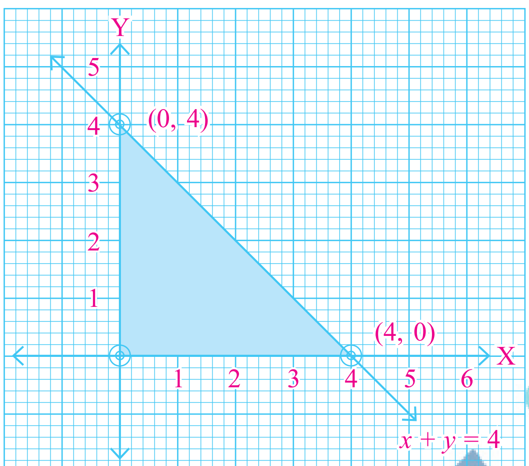
= 9 એકમ

20.

$x + y \leq 4$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x + 4y$
$x + y = 4$

x	0	4
y	4	0

(0, 4) $x \geq 0, y \geq 0$
(4, 0) (0, 0)



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે જે સિમિત છે. શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 0), (0, 4) અને (4, 0) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x + 4y$
(4, 0)	Z = 12
(0, 4)	Z = 16 ← મહત્તમ
(0, 0)	Z = 0

આમ, (0, 4) આગળ Zનું મહત્તમ મૂલ્ય 16 મળે.

21.

ઘટના E_1 : વિદ્યાર્થી જવાબ જાણે છે.

ઘટના E_2 : વિદ્યાર્થી જવાબનું અનુમાન કરે છે.

$P(E_1) = \frac{3}{4}$

$P(E_2) = \frac{1}{4}$

ઘટના A : વિદ્યાર્થી જવાબ આપે છે અને તે સાચો હોય.

વિદ્યાર્થી સાચો જવાબ આપે અને જવાબ જાણતો હોય તેની સંભાવના,

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)$$

$$= \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{13}{16}$$

$$\therefore \quad P(E_1 \mid A) = \frac{\frac{3}{4} \times 1}{\frac{13}{18}}$$

$$= \frac{12}{13}$$

વિભાગ-C

22.

અહીં, $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ધારો કે, $P = \frac{1}{2}(B + B')$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

હવે, $P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$

આમ, $P = \frac{1}{2}(B + B')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, ધારો કે,

$$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

તો, $Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q.$

આમ, $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, $P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

23.

➪ શ્રેણિકના સ્વરૂપમાં લખતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ AX = B

જ્યાં, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$

AX = B

$\therefore X = A^{-1}B$

➪ A^{-1} શોધવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$= 2(10 + 3) - 1(-5 + 0) + 1(3 - 0)$

$= 2(13) + 5 + 3$

$= 26 + 5 + 3$

$= 34 \neq 0$

$\therefore$ અનન્ય ઉકેલ મળે છે.

➪ *adj* A મેળવવા માટે,

2 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

$= 1(10 + 3)$

$= 13$

1 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-5 + 0)$

$= 5$

1 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(3 - 0)$

$= 3$

1 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-5 - 3)$

$= 8$

–2 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

$= 1(-10 + 0)$

$= -10$

–1 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)(6 - 0)$

$= -6$

0 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1 + 2)$

$= 1$

3 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-2 - 1)$

$= 3$

–5 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(-4 - 1)$

$= -5$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$

$$= \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

➪ $X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 13 + 12 + 9 \\ 5 - 15 + 27 \\ 3 - 9 - 45 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 34 \\ 17 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$

24.

➪ ધારો કે, $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ અને $v = x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$\therefore y = u + v$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{......... (1)}$$

અહીં, $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ ની

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$$\log u = x \log\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log\left(x+\frac{1}{x}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}x$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{x}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{... (2)}$$

હવે, $v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ ની

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$$\log v = \left(1+\frac{1}{x}\right)\log x$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \log x\left(0-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right)$$

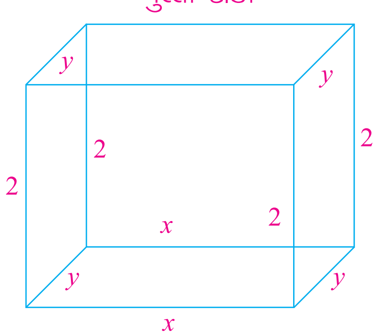
$$\therefore \frac{dv}{dx} = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right) \quad \text{...... (3)}$$

પરિણામ (1) માં પરિણામ (2) અને (3) ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x+1-\log x}{x^2}\right]$$

25.

ખુલ્લી ટાંકી



➪ ધારો કે લંબચોરસના આધારની લંબાઈ x મીટર, પહોળાઈ y મીટર છે અને ઊંડાઈ 2 મીટર આપેલ છે.

ટાંકીનું ઘનફળ = 8 (મીટર)^3

$\therefore x \times y \times 2 = 8$

$\therefore xy = 4$ ... (1)

હવે, આધારનું ક્ષેત્રફળ, Δ_1 = લંબાઈ × પહોળાઈ

$= xy$

Δ_1 = 4 મી^{2} અથવા ચો મી

1 ચો.મી. = ₹ 70

$\therefore$ 4 ચો.મી. = (?)

$= \frac{70 \times 4}{1}$ = ₹ 280

હવે, ચાર પૃષ્ઠનું કુલ ક્ષેત્રફળ,

$\Delta_2 = 4y + 4x$

$\Delta_2 = 4(x + y)$ ચો મી

ચાર પૃષ્ઠોનો ખર્ચ = $45 \times 4(x + y)$

$= 180\,(x + y)$

$\therefore$ કુલ ખર્ચ = $280 + 180\,(x + y)$ ... (2)

$f(x) = 280 + 180(x + y)$

$$\therefore f(x) = 280 + 180\left(x+\frac{4}{x}\right)$$

$$\therefore f'(x) = 180\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\therefore f''(x) = 180\left(\frac{8}{x^3}\right) > 0$$

→ ન્યૂનતમ ખર્ચ મેળવવા માટે,

$f'(x) = 0$

$$\therefore 180\left(1-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

$$\therefore 1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\therefore 1 = \frac{4}{x^2}$$

$\therefore x^2 = 4$

$\therefore x = 2$ $(\because x > 0)$

→ જો $x = 2$ હોય તો,

$$\therefore y = \frac{4}{x}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$\therefore y = 2$

→ પરિણામ (2) પરથી,

$\therefore$ કુલ ખર્ચ = $280 + 180(2 + 2)$

$= 280 + 720$

$\therefore$ કુલ ખર્ચ = ₹ 1,000

26.

➪ ધારો કે $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$ ... (1)

ગુણધર્મ (6) પરથી,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\, dx \quad \text{... (2)}$$

→ (1) અને (2) ની અનુરૂપ બાજુઓનો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cdot \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log (\sin x \cdot \cos x) + \log 2 - \log 2)\, dx$$

($\log 2$ ને ઉમેરીને બાદ કરતાં)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log (\sin 2x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx$$

પ્રથમ સંકલિતમાં $2x = t$ આદેશ લેતાં, $2dx = dt$ થશે.

તથા, જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને

જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = \pi$.

$$\therefore 2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\, dt - \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

(ગુણધર્મ (7) પરથી, $\sin(\pi - t) = \sin t$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$

(ચલ t ને સ્થાને x કરતાં)

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

તેથી $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

27.

➪ $(x + 1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$

$\therefore \frac{dy}{2e^{-y} - 1} = \frac{dx}{x+1}$

$\therefore \frac{e^y\, dy}{2 - e^y} = \frac{dx}{x+1}$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\therefore \int \frac{e^y\, dy}{(2 - e^y)} = \int \frac{dx}{x+1}$

$\therefore -\int -\frac{e^y\, dy}{(2 - e^y)} = \int \frac{dx}{x+1}$

$\therefore -\log|2 - e^y| = \log|x + 1| + \log|c|$

$\therefore \log\left|\frac{1}{2 - e^y}\right| = \log|c(x + 1)|$

$\therefore \frac{1}{2 - e^y} = c(x + 1)$ ... (1)

→ જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $y = 0$

$\therefore \frac{1}{2 - e^0} = c(0 + 1)$

$\therefore \frac{1}{2 - 1} = c$

$\therefore c = 1$

→ c ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore \frac{1}{2 - e^y} = (x + 1)$

$\therefore (2 - e^y)(x + 1) = 1$

$\therefore 2 - e^y = \frac{1}{x+1}$

$\therefore 2 - \frac{1}{x+1} = e^y$

$\therefore \frac{2x + 2 - 1}{x+1} = e^y$

$\therefore \frac{2x+1}{x+1} = e^y$

$\therefore y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1,$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.